TD Logique et démonstrations

Logique

LCS **Exercice 1** Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ écrire formellement les assertions suivantes

1. $x_1, \dots, x_n$ sont tous non nuls.
2. $x_1, \dots, x_n$ sont non tous nuls.

1I3 **Exercice 2** Compléter par $\Leftrightarrow, \Leftarrow, \Rightarrow$ de sorte que l'assertion soit toujours correcte. Justifier les implications fausses par des contre-exemples, et les implications vraies par un argument.

1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $x = y \qquad x^2 = y^2$
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x = y \qquad x^2 = y^2$
3. Pour $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x \leq y \qquad \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$
4. Pour $x, y \in \mathbb{R}^*$, $x < y \qquad \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x^2 < x \qquad x < 1$
6. Pour $n, m, k \in \mathbb{N}$, $(n \mid k \text{ et } m \mid k) \qquad nm \mid k$

EMV **Exercice 3** Compléter par l'implication ou l'équivalence toujours correcte.

1. $\forall x \in E,\ P(x) \text{ et } Q(x) \qquad (\forall x \in E,\ P(x) \text{ et } \forall x \in E,\ Q(x))$
2. $\exists x \in E,\ P(x) \text{ et } Q(x) \qquad (\exists x \in E,\ P(x) \text{ et } \exists x \in E,\ Q(x))$
3. $\forall x \in E,\ P(x) \text{ ou } Q(x) \qquad (\forall x \in E,\ P(x) \text{ ou } \forall x \in E,\ Q(x))$
4. $\exists x \in E,\ P(x) \text{ ou } Q(x) \qquad (\exists x \in E,\ P(x) \text{ ou } \exists x \in E,\ Q(x))$

3FQ **Exercice 4** Soit (u_n) une suite réelle et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Donner le sens et la négation formelle des propriétés.

1. $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \Rightarrow (|u_n| \leq \varepsilon)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
4. $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N},\ (n \geq m \text{ et } u_n = 0)$

AGO **Exercice 5**

1. Soit (u_n) une suite réelle. Donner la définition formelle de
   a) (u_n) non majorée.
   b) (u_n) minorée.
2. Montrer que la somme de deux suites majorées est majorée.
3. Montrer que la somme d'une suite non majorée et d'une suite minorée est non majorée.

Démonstrations

MWJ **Exercice 6** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n - 2^n$.

F6M **Exercice 7** Soit x un réel irrationnel.

1. Montrer que pout tout nombre rationnel r, le réel $r + x$ est aussi un nombre irrationnel.
2. Énoncer un résultat analogue pour rx.
3. Montrer que la somme de deux nombres irrationnels n'est pas toujours irrationnelle.

XOC **Exercice 8** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que $abc = 1$ si et seulement s'il existe $x, y, z \in \mathbb{R}^*$ tels que $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.

8FQ **Exercice 9** Soit $x \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2, x = a + b\sqrt{2}$. Montrer que ce couple d'entiers (a, b) est unique.

5XY **Exercice 10** Montrer que toute fonction $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ s'écrit, de manière unique, comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction g vérifiant $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$.

AYY **Exercice 11**

1. Soit $a \geq -1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ (1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. Soit $a \in\ ]0,1[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ (1 - a)^n \leq \frac{1}{1+na}$.

Arithmétique

F9I **Exercice 12**

1. Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \mid m$, alors $a^n - 1 \mid a^m - 1$.
   Indication : *Penser à une factorisation, de $x^n - 1$.*
2. Soit $n \geq 1$. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est premier.

3VW **Exercice 13** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = 2^p(2q + 1)$.

6FT **Exercice 14** Montrer que 2023 ne peut pas s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.
Indication : *Travailler modulo 4, ou considérer le reste de la division euclidienne par 4.*

Analyse

ET6 **Exercice 15** Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On considère les propriétés

$$(P)\colon \forall c \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in I,\ |x - c| < \varepsilon \quad \text{et} \quad (Q)\colon \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a < b) \Rightarrow \exists x \in I,\ a \leq x \leq b.$$

Montrer que (P) et (Q) sont équivalentes. *Si I vérifie ces propriétés, on dit que I est dense dans $\mathbb{R}$.*

VP9 **Exercice 16** Montrer que la somme de deux suites périodiques est une suite périodique.

H6K **Exercice 17** ★ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes, qui caractérisent la croissante exponentielle de la suite.

(i) $\exists \lambda > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n \geq \lambda^n$

(ii) $\exists C > 0, \exists \mu > 1, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \geq n_0,\ u_n \geq C\mu^n$

8WH **Exercice 18** ★ Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{6} \rfloor}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq n+1$.
2. Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq C(n+1)$.

   Indication : *L'assertion $u_n \leq C(n+1)$ n'est pas héréditaire, mais d'autres le seraient.*

N9Z **Exercice 19** ★ Soit (u_n) une suite réelle strictement positive vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq 1$.

Récurrences

5J3 **Exercice 20** 🍃

1. Montrer que pour $x_1, x_2 \geq 1$, $x_1 + x_2 \leq 1 + x_1 x_2$.
2. Soit $n \geq 1$ et $x_1, \dots, x_n \geq 1$. Montrer que $x_1 + \dots + x_n \leq (n-1) + x_1 \dots x_n$.

LPG **Exercice 21** On considère la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que (F_n) est croissante.
2. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, $F_n F_{n+2} = F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1}$.
4. ★ Montrer que pour tout $n \geq 1$, $F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2$.

GJ3 **Exercice 22** ★ Théorème de Zeckendorf Montrer que tout entier $n \geq 0$ s'écrit, de manière unique, comme la somme de termes de la suite de Fibonacci distincts, d'indices ≥ 2 ($F_2 = 1$, $F_3 = 2$), et non consécutifs.

E2N **Exercice 23** ★ ★ Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ distincts, et M un ensemble de $n-1$ entiers strictement positifs, ne contenant pas $s = a_1 + \dots + a_n$. Une sauterelle saute le long de l'axe réel, à partir de l'origine. Elle va faire n sauts vers la droite, de longueurs $a_1, \dots, a_n$, dans un ordre quelconque. Montrer que l'on peut choisir l'ordre de sorte qu'elle évite tous les points de M.

Équations fonctionnelles

S9Z **Exercice 24** Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall n, m \in \mathbb{N},\ f(n+m) = f(n) + f(m)$.

XCW **Exercice 25** Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on considère l'équation fonctionnelle $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(x+y) - f(x-y) = xy \qquad (*)$

1. Soit f vérifiant $(*)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ en fonction de x et de $f(0)$.
2. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $(*)$?

Divers

33Z **Exercice 26** Une interversion de quantificateurs On colorie le plan $\mathbb{R}^2$ avec deux couleurs.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe deux points du plan de la même couleur à distance x l'un de l'autre.
2. Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout $x > 0$, il existe deux points du plan de cette couleur à distance x l'un de l'autre.

UFP **Exercice 27** ★ Pour $A \subset \mathbb{Z}^2$ une partie finie, on note ∂A la frontière de A, c'est-à-dire l'ensemble des points de A dont au moins un voisin (à une distance 1) n'appartient pas à A. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Card}(\partial A) \geq C\sqrt{\mathrm{Card}(A)}$, indépendamment de la partie $A \subset \mathbb{Z}^2$. **Indication** : *Considérer H/L le nombre d'ordonnées/d'abscisses distinctes des éléments de A.*

VCD **Exercice 28** ★ Un problème de John Conway Soit E un ensemble de points de $\mathbb{R}^2$. On note $|x-y|$ la distance euclidienne entre deux points de $\mathbb{R}^2$.

- On dit que E contient des points arbitrairement proches si $\forall \varepsilon > 0, \exists x, y \in E, (x \neq y \text{ et } |x-y| \leq \varepsilon)$.
- On dit que E est 1-séparé si $\forall x, y \in E, x \neq y \Rightarrow |x-y| \geq 1$.

Montrer l'équivalence entre les assertions

(i) «Tout ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ qui intersecte tout rectangle d'aire 1 contient des points arbitrairement proches»

(ii) «Pour toute partie 1-séparée E, il existe des rectangles d'aires arbitrairement grandes qui n'intersectent pas E».

Graphes

5E4 **Exercice 29** La population d'un village se réunit un jour de fête. Prouver que le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes est pair.

Z1N **Exercice 30** Soit G un graphe à m arêtes et n sommets. Montrer que si $m \geq n$, alors G admet un cycle.

K8D **Exercice 31** Soit G un graphe dont le degré moyen est au moins d, c'est-à-dire tel que $m \geq \frac{dn}{2}$. Montrer que G contient un sous-graphe H, obtenu en retirant certains sommets de G et les arêtes attachées, dont tous les sommets soient de degré au moins $\frac{d}{2}$.

VE4 **Exercice 32** ♣ Formule d'Euler Un graphe connexe est dessiné dans le plan, sans que les arêtes ne se croisent. On note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes, et f le nombre de faces (dont la face infinie extérieure). Montrer que $s - a + f = 2$.

SBR **Exercice 33** ★ Dans une grille $n \times n$, on place $2n$ jetons. Montrer qu'il existe $k > 1$ et une suite de jetons $c_1, \dots, c_{2k}$ tels que l'on puisse successivement sauter de c_i à c_{i+1} (et finalement de c_{2k} à c_1) en se déplaçant alternativement sur une ligne ou sur une colonne de la grille.

Indication : *Se ramener à l'existence d'un cycle dans un graphe. La difficulté est dans le choix du graphe.*